حل المعادلات غير الخطية ذات المجهول الواحد
Solution of non-linear equations with one variable

1- Bi-section Method طريقة التنصيف

Let $f(x)$ be a continuous function and defined on $[a,b]$ Let $f(a)$ and $f(b)$ have opposite signs

$$f(a) * f(b) < 0$$

Then there exist a point p such that $f(p)=0$ where $p \in (a,b)$

: Intermediate value theorem
نظرية القيمة الوسطى

Algarithm : طريقة الحل

١- نجد قيمة $p = \frac{a+b}{2}$

٢- نحسب قيمة $f(p)$ وهناك ثلاث احتمالات:

أ- اذا كانت $f(p)=0$ فأن p هو الجذر المطلوب وهو جذر فعلي (ليس تقريبي) وهنا يجب ان ننهي المسالة.

ب- اذا كان $f(a) * f(p) < 0$ فان للمعادلة جذر يقع ضمن الفترة $[a,p]$ نضع $b=p$ ومن ثم نعود الى الخطوة ①

Scanned with CamScanner

ج- اذا كان $f(a) * f(p) > 0$ فان للمعادلة جذر يقع ضمن الفترة $[p, b]$

① نضع $a = p$ ومن ثم نعود الى الخطوة

٣- نكرر هذه العملية الى ان نصل الى الجذر المطلوب بنسبة خطأ لاتتجاوز e

شرط التوقف $|P_n - P_{n-1}| \leq e$

سؤال: ماهو عدد التكرارات اللازمة للوصول الى الحل ؟ N

عدد التكرارات يتبع العلاقة الآتية:

$$2^{-N} * (b-a) \leq e$$

$$2^{-N} \leq \frac{e}{b-a}$$

$$\log 2^{-N} \leq \log \frac{e}{b-a}$$

$$-N \log 2 \leq \log \frac{e}{b-a}$$

$$\log \frac{e}{b-a}$$

Scanned with CamScanner

مثال : حل المعادلة الآتية بطريقة التنصيف اذا علمت بأن الجذر يتواجد في الفترة [2,3] و مقدار الخطأ المطلوب لايتجاوز 0.0001

$x^3 - 9x + 1 = 0$

الحل

$f(x) = x^3 - 9x + 1$

$a = 2 \quad b = 3 \quad e = 0.0001$

$f(a) = -9$

$f(b) = 1$

$f(a) * f(b) < 0$ كمية سالبة

∴ جذر المعادلة يقع فعلاً بين 2 و 3

لايضاح العمليات الحسابية تكون الجدول الآتي ولذي يحتاج الى حاسبة جيبية Calculator لانشائه :

n	a	b	p	f(p)
1	2	3	2.5	-5.8
2	2.5	3	2.75	-2.9
3	2.75	3	2.88	-1.03
4	2.88	3	2.94	-0.05
5	2.94	3	2.97	0.47
6	2.94	2.97	2.955	0.21
7	2.94	2.955	2.9475	0.08
8	2.94	2.9475	2.9438	0.017
9	2.94	2.9438	2.9419	0.016
10	2.9419	2.9438	2.9428	0.003

∴ جذر المعادلة هو ≈ 2.942

لاحظ ايضاً $f(p)$

ومن الواضح انه كلما زاد عدد التكرارات ازادت الدقة و $f(p) \longrightarrow$ zero و $n \longrightarrow \infty$

مثال: حل المعادلة الآتية:

$$e^x - 3x = 0$$

اذا علمت ان الجذر يقع ضمن الفترة $[1.5, 1.6]$ والخطأ المطلوب يجب ان لايتجاوز 0.01.

الحل:

$$f(x) = e^x - 3x$$

$$a = 1.5 \quad b = 1.6 \quad e = 0.01$$

$$f(a) = -0.02$$

$$f(b) = 0.15$$

$$\therefore f(a) * f(b) < 0$$

∴ يوجد عدد فردي من الجذور يقع ضمن الفترة.

تكملة الجدول كما في السابق

n	a	b	p	f(p)
1	1.5	1.6	1.55	0.06
2	1.5	1.55	1.525	0.02
3	1.5	1.525	1.5125	0.00056
4	1.5	1.5125	1.5062	-0.00904
5	1.5062	1.5125	1.50935	-0.00426
6	1.50935	1.5125	1.51092	-0.00184

∴ جذر المعادلة هو 1.51

مثال: حل المعادلة الآتية:

$$\tan x + x = 0$$

اذا علمت ان الجذر يقع ضمن الفترة $[2, 2.1]$ والمطلوب ان يكون الخطأ لايتجاوز 0.01

Scanned with CamScanner

الحل :

$f(a) = -0.18$

$f(b) = 0.39$

∴ فعندئذٍ يوجد جذر ضمن الفترة $[2, 2.1]$.

نكون الجدول التالي :

n	a	b	p	f(p)
1	2	2.1	2.05	0.12
2	2	2.05	2.025	-0.022
3	2.025	2.05	2.0375	0.053
4	2.025	2.0375	2.03125	-0.0152
5	2.025	2.03125	2.02812	-0.003
6	2.02812	2.03125	2.02968	0.0056
7	2.02813	2.02968	2.02890	0.0008

∴ جذر المعادلة هو ≈ 2.029 :

واجب بيتي :

حل المعادلات الآتية :

① $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ $[1, 2]$ use 9 iterations

② $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0$ $[1, 2]$ $e = 0.0001$

③ $2x - 3\sin x - 5 = 0$ $[-\pi, \pi]$ $e = 0.001$

④ $x^3 - x - 11 = 0$ $[2, 3]$ $e = 0.001$

⑤ $x^4 - x - 10 = 0$ $[1, 2]$ $e = 0.001$

Scanned with CamScanner